

Le competenze nel raccordo tra medie e biennio

ASSE SCIENTIFICO / TECNOLOGICO

Francesco Cappelli, Maria Rosa Rivali, Veronica Dati

Rilevazioni solari e astronomia

Indicazioni didattiche

Obiettivi generali o educativi:

la capacità di comprendere un fenomeno (il variare dell'altezza del sole) che, anche se avviene sotto i nostri occhi tutti gli anni, non fa parte delle esperienze coscienti della maggior parte delle persone

- la capacità di organizzare informazioni diverse, ottenute utilizzando diversi mezzi di indagine, per studiare scientificamente un fenomeno complesso

Obiettivi specifici o di disciplina: **Asse Scientifico / Tecnologico**

Matematica:

- la capacità di utilizzare dati raccolti indipendentemente per arrivare attraverso il calcolo della media ad individuare la misura più attendibile di un certo fenomeno
- la capacità di usare i diagrammi per rappresentare fenomeni continui,
- la capacità di confrontare serie di dati riferentisi allo stesso fenomeno,
- la capacità di trasformare numeri decimali negli equivalenti complessi a base sessagesimale
- capacità di usare rapporti e proporzioni per elaborare i dati

Geometria:

- la capacità di usare correttamente un filo a piombo per controllare la verticalità del ritto
- la capacità di effettuare correttamente misure precise di una lunghezza in un contesto reale
- la capacità di definire il concetto di massima precisione significativa
- la capacità di utilizzare il teorema di Pitagora ed altri (alcune proprietà dei triangoli) per analizzare un problema
- un accostamento intuitivo al concetto trigonometrico di coseno

Scienze

- Il concetto di equinozio e di solstizio
- Il concetto di latitudine, longitudine, di inclinazione dell'asse terrestre e di fuso orario
- La capacità di seguire un disegno sperimentale per verificare delle ipotesi (??)
- La capacità di utilizzare serie di dati per trarne conclusioni logiche
- La capacità di paragonare serie diverse di dati

- | | |
|----------------|------------------------|
| • 21 Marzo | Equinozio di primavera |
| • 21 Giugno | Solstizio d'estate |
| • 23 Settembre | Equinozio d'autunno |
| • 22 Dicembre | Solstizio d'inverno |

Nella maggior parte dei casi l'orario scolastico rende difficile rilevare l'ora esatta in cui sorge il sole e quella del tramonto ma, se la giornata non è festiva, con un minimo di impegno organizzativo è possibile rilevare l'ora dell'esatto mezzogiorno locale.

In caso di difficoltà, è possibile fare le rilevazioni il giorno immediatamente prima o quello immediatamente dopo con piccoli errori, di cui si dovrà comunque tenere il debito conto.

Il confronto tra questa e l'ora che viene convenzionalmente considerata mezzogiorno per l'effetto del fuso orario (*e, nel caso degli equinozi o del solstizio d'autunno, dell'ora legale*) permette di fare un preciso discorso su questi aspetti della nostra esperienza ma anche sulla longitudine e latitudine del luogo e sull'inclinazione dell'asse terrestre rispetto al piano dell'eclittica.

Infine è possibile calcolare l'altezza del sole a partire dalla lunghezza dell'ombra e quella del ritto, utilizzando una qualsiasi calcolatrice scientifica.

Prerequisiti:

- Capacità di effettuare misure di lunghezza, e di tenere registrazioni ordinate di quanto rilevato
- Conoscenza di elementi di geometria piana: Teorema di Pitagora e triangoli simili
- Conoscenza del significato del P greco e del rapporto tra raggio e circonferenza
- Conoscenza e capacità di utilizzo di rapporti e proporzioni dirette

Materiali necessari:

- una giornata di sole
- uno spazio all'aperto, relativamente vicino alla scuola, abbastanza piano, su cui operare

Strumenti da utilizzare:

- almeno un ritto da salto in alto (*meglio se di più, si possono trovare in palestra, accordandosi con i colleghi di Ed. Fisica*) e/o alcuni bastoni dritti in modo da avere una stazione di rilevamento per ogni gruppo di lavoro
- pezzetti di legno, carta, ecc. da mettere sotto i piedi dei ritti per portarli in posizione perfettamente verticale
- tanti "filo a piombo" quanti sono i ritti ed i bastoni (*anche solo un sasso legato ad una corda*) o, meglio, una bolla da muratore
- fogli da protocollo bianchi (*a righe o a quadretti purché nuovi*)
- quaderni e penne per annotare i dati rilevati
- un orologio
- bindelle metriche da due metri per misurare l'ombra del ritto (*possono essere preparate in precedenza usando strisce di carta su cui siano stati riportati i cm*)
- non necessaria ma decisamente utile una cartina militare 1:25000 della zona in cui si trova la scuola.

La proposta:

La proposta prevede

- di rilevare il cambiamento della lunghezza dell'ombra di alcuni oggetti nell'intervallo di tempo attorno al mezzogiorno,
- di trasformare queste misurazioni per renderle paragonabili tra di loro,
- di fare una media tra i risultati per ottenere una stima del "valore vero" di queste lunghezze,
- di trasformare questa serie di valori di lunghezza in una serie di misure angolari dell'altezza del sole rispetto all'orizzonte,
- di vedere come queste altezze siano correlate con la latitudine e la longitudine del luogo e con l'inclinazione dell'asse terrestre.

Attività preparatorie per i docenti:

Scegliere uno spazio vicino alla scuola in cui poter effettuare con calma le rilevazioni, organizzare i gruppi di alunni che materialmente effettueranno le rilevazioni, preparare il materiale da utilizzare per mettere i ritti ed i bastoni in posizione perfettamente verticale (*i pezzetti di carta e/o di cartone da mettere sotto i punti di appoggio del ritto per raddrizzarlo*)

I vari gruppi di alunni effettueranno rilevazioni analoghe: è importante che ogni gruppo sappia esattamente quale è l'altezza del proprio gnomone (*ritto o bastone che sia*) e che tutti i gruppi misurino l'altezza dell'ombra alla stessa ora (*per questa ragione è sufficiente un ragazzo con orologio che scandisca i tempi*).

Nel successivo lavoro in classe la disponibilità di più serie di dati permetterà di effettuare confronti con l'uso delle proporzioni per rendere omogenei i dati e successivamente della media.

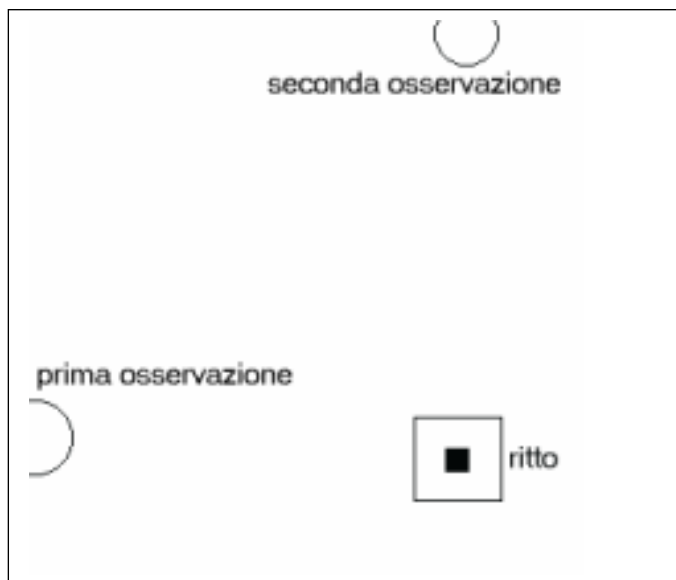
Tempi medi prevedibili:

La mattinata del 21/12 o del 21/6 per il solstizio oppure quella del 21/9 e/o del 21/3 per l'equinozio (*al limite l'esperienza si può fare anche utilizzando il giorno immediatamente precedente o seguente*) dalle 11 alla fine delle lezioni per eseguire le rilevazioni, più tre o quattro ore di lezione in classe per effettuare le elaborazioni, valutare i dati e riflettere sui risultati.

L'attività

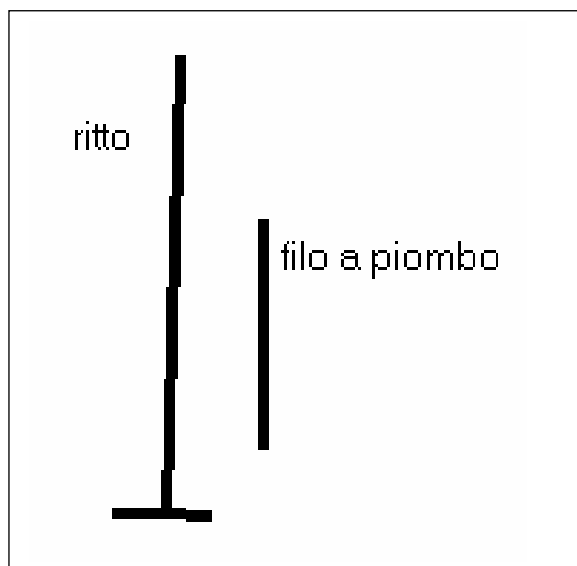
La rilevazione

Alcuni giorni prima l'insegnante presenta l'attività dando alcune (*poche*) indicazioni sul fenomeno da rilevare e scegliendo l'area operativa con i consigli di tutta la classe. (*una uscita per recarsi sul luogo e prenderne conoscenza non nuoce*), inoltre divide la classe in gruppi di tre ragazzi, che saranno incaricati di gestire un osservatorio. Si provvederà anche a nominare un responsabile dei tempi che dovrà segnalare i momenti in cui fare le rilevazioni. La mattina prescelta, verso le 11, la classe si porta sull'area con ritti e bastoni (uno per ogni gruppo) ed inizia a porli in posizione perfettamente verticale. Infatti se il piede del ritto non è su un appoggio perfettamente orizzontale la sua posizione non sarà corretta. Se si dispone della bolla, la si utilizza iniziando a verificare la verticalità degli gnomoni.



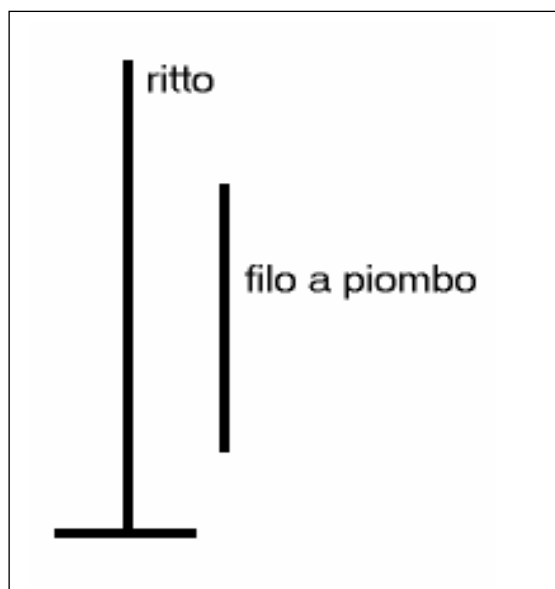
ritto siano paralleli, correggendo la posizione del ritto nel modo illustrato prima.

L'operazione va ripetuta più volte ponendo l'osservatore in due posizioni distanti tra loro circa 90° come illustrato nel diagramma soprastante che presenta una vista dall'alto.



Per portare il ritto alla verticale si usano i pezzetti di legno o carta fino ad aver ottenuto il risultato desiderato.

Se invece si dispone solo del filo a piombo si mette un alunno a fianco del ritto con il filo a piombo in mano e, ponendosi ad tre o quattro passi di distanza, si controlla che il filo ed il



Quando il ritto appare parallelo al filo a piombo dalle due viste indicate si è ragionevolmente sicuri della sua verticalità.

I bastoni vanno piantati nel terreno, la loro verticalità va controllata nello stesso modo descritto per i ritti.

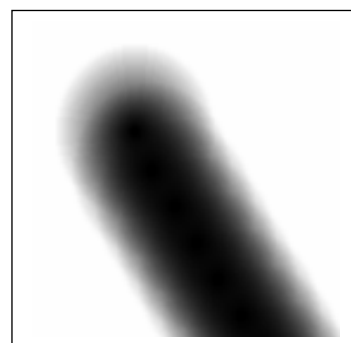
La correzione delle posizioni errate va fatta conficcando altri pezzi di legno a fianco del bastone in modo da raddrizzarlo.

A questo punto l'attrezzatura per la rilevazione è a posto e si può iniziare a porre i fogli all'estremità dell'ombra proiettata dal ritto.

La funzione del foglio è quella di migliorare l'evidenza del punto in cui l'ombra finisce: si vedrà che mentre ad una osservazione superficiale l'ombra sembra ben definita, quando si va ad osservare con attenzione le cose appaiono molto meno chiare.

L'illustrazione a lato mostra, con uno schizzo illustrativo, come si presenta la situazione. Si definisce quale debba essere considerata la posizione esatta della estremità dell'ombra (*in genere si assume il punto centrale della zona sfumata*) ed, alle 11 e 30, si misura la lunghezza dell'ombra, in metri e centimetri, segnandola su un apposito taccuino insieme all'ora della rilevazione.

Si ripete la misurazione ogni cinque minuti (*ma si può anche scegliere l'intervallo di 3 minuti*) dalle 11 e 30 alle 13, riportando i dati sul taccuino.



La precisione della misurazione si limita ai centimetri perché la sfocatura dell'ombra rende impossibile rilevare i millimetri.

Questo è un buon punto di partenza per riflettere su come le varie unità di misura di una certa grandezza vadano adeguate alle situazioni in cui si opera.

Le misure rilevate dovrebbero ridursi per un certo periodo per poi cominciare ad allungarsi di nuovo.

ora	ritto	cm ombra	ombra st.
12.45	183	181	98,9071
12.50	183	179	97,81421
12.55	183		
13.00	183		
13.05	183		
13.10	183		
13.15	183	169	92,34973
13.20	183	167	91,25683
13.25	183		
13.30	183	165	90,16393
13.35	183	164	89,61749
13.40	183	164	89,61749
13.45	183		
13.50	183	166	90,71038
13.55	183	168	91,80328
14.00	183		
14.05	183	172	93,98907

A fianco riporto una serie di misure rilevate a Milano il 20 settembre 2001 da una prima: in quell'occasione, visto che si operava in regime di ora legale, tutti i tempi erano stati spostati avanti di un'ora.

Come si può ben vedere l'operato dei bambini è stato tutt'altro che accurato, ma il fatto di aver centrato il momento di minima lunghezza (tra le 13 e 35 e le 13 e 40 con due misure di 164) ha permesso di effettuare ugualmente il lavoro successivo

ore	cm
12.45	181
12.50	179
13.15	169
13.20	167
13.30	165
13.35	164
13.40	164
13.50	166
13.55	168
14.05	170

Elaborazione dei dati

La prima operazione da effettuare sulle serie di dati raccolte è quella di rapportare tutte le lunghezze rilevate ad un valore unico di lunghezza dello gnomone (*ritto o bastone che sia*).

Infatti se si sono usati ritti e/o bastoni di altezze diverse i dati rilevati non sono confrontabili, per questa ragione è bene riportarli tutti a valori omogenei tra di loro, mediante l'uso di proporzioni che riportino le lunghezze delle ombre ad una altezza standard dello gnomone, uguale per tutti. Ad esempio se un ritto era alto metri 1,83 ed un altro metri 1,15, si può stabilire come misura standard dello gnomone la lunghezza di metri 1 e procedere, con una serie di proporzioni, a calcolare le lunghezze "standardizzate" delle ombre

Presento ora un esempio di elaborazione effettuato a partire dai dati riportati sopra per mostrare quale sia il procedimento da seguire.

Si è iniziato con il mettere i dati in una tabella che mantenesse l'omogeneità degli intervalli temporali, come illustrato nella pagina successiva.

È ovvio che si hanno molte caselle vuote nella colonna delle lunghezze, ma le posizioni temporali dei dati disponibili diventano corrette.

Il secondo passo è la standardizzazione dei dati rilevati

Visto che il ritto usato è alto m1,83 e che il valore standard scelto è di 100 cm, il valore di ogni ombra è stato moltiplicato per 100 e diviso per 183

I risultati sono riportati nell'ultima colonna della tabella e non sono stati troncati all'unità, anche se i decimali rappresenterebbero millimetri o sottomultipli inferiori, che non possono avere senso se riferiti a misure la cui precisione di partenza è limitata ai cm, per ridurre gli errori di troncamento nel procedere del calcolo

Questa operazione, eseguita su tutte le serie di dati, ci porta ad avere valori confrontabili.

È ovvio che una simile quantità di calcoli, se eseguita manualmente, diventa proibitiva ma l'utilizzo anche solo di una normale calcolatrice tascabile per ogni gruppo di lavoro, permette di aggirare questo problema.

Se si ha la possibilità di utilizzare un foglio elettronico, del tipo di Excell o Works, per automatizzare completamente questa fase del lavoro le cose vanno ancora meglio ma questa non è assolutamente una condizione necessaria.

Ottenute le varie misurazioni standardizzate si può fare le medie tra i valori raccolti.

Tutti i valori standardizzati relativi ad una certa ora dovrebbero essere uguali; ciò non avviene per gli inevitabili errori di rilevazione.

L'unico modo di avvicinare il più possibile il valore "vero" della misura in questione, che a questo punto rimane sconosciuto, è quello di fare una media tra tutti i valori disponibili.

Se ad esempio ad una certa ora abbiamo ottenuto i valori standardizzati: 92, 91, 93, 93, 91, il valore che considereremo "giusto" sarà dato dalla media tra quei numeri e cioè 92.

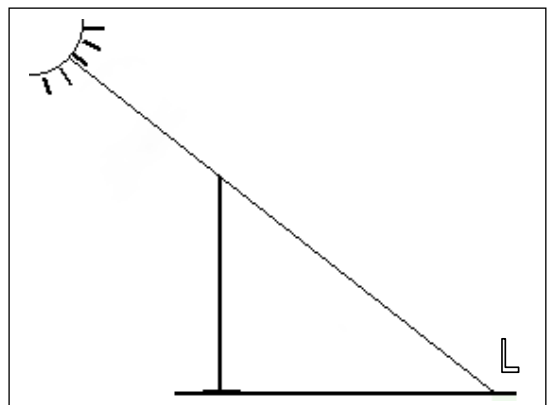
Questa operazione va ripetuta per tutte i gruppi di valori delle singole ore, facendo la media tra i valori effettivamente disponibili.

Al termine di tutto ciò avremo una singola serie di valori su cui operare ed a cui faremo riferimento da qui in avanti.

Nell'esempio riportato, i ragazzi hanno rilevato una sola serie di dati, per cui non è stato né possibile né necessario effettuare il passaggio del calcolo della media.

Proseguirò lavorando sulla serie di dati utilizzata finora, come se si trattasse di una serie ottenuta dal calcolo delle medie.

Devo sottolineare che, procedendo, diventa necessario l'utilizzo del concetto di coseno trigonometrico, ma si tratta solamente del concetto in se, ed i ragazzi delle mie classi, nei numerosi casi in cui ho fatto l'esperienza, non hanno mai mostrato difficoltà nel comprenderlo.

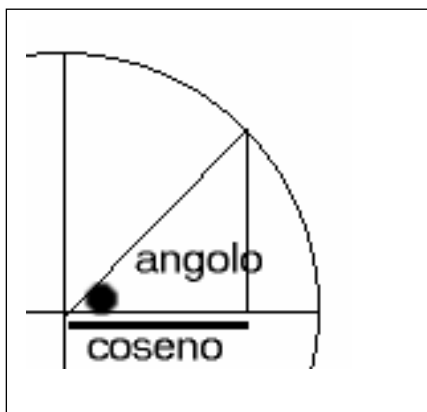


Comunque se non si vuole affrontare questa parte in classe, è anche possibile che questa parte dell'elaborazione venga eseguita dall'insegnante a casa e che i risultati siano poi riportati ai ragazzi in classe per la successiva riflessione.

A questo punto bisogna riflettere un po' sulla geometria della situazione che abbiamo analizzato. Per prima cosa vediamo un po' cosa sono le lunghezze che abbiamo rilevato.

Lo schema a lato mostra la situazione generale; osservandolo risulta chiaro che la lunghezza dell'ombra che abbiamo misurato non è altro che uno dei cateti di un triangolo rettangolo costituito dal ritto, dall'ombra stessa e dal raggio solare che sfiora la sommità del ritto.

L'angolo formato dal raggio del sole ed il piano di terra in **L**, è detto anche **altezza del sole** in quel certo momento.



Visto che l'altezza del ritto rimane fissa all'aumentare dell'altezza del sole diminuisce la lunghezza dell'ombra. Per calcolare l'ampiezza dell'angolo **L** a partire dalla lunghezza dell'ombra bisogna introdurre il concetto di coseno.

In una circonferenza a raggio unitario si dice coseno di un angolo al centro, il segmento che va dal centro alla proiezione dell'estremo dell'altro lato (vi prego di non prendere questa definizione alla lettera, serve solo per dare un'idea intuitiva della cosa, se voi sapete fare di meglio va benissimo).(*)

La nostra ombra è esattamente il coseno dell'angolo che cerchiamo, c'è solo il problema che la circonferenza non è una circonferenza unitaria, e varia ad ogni misurazione.

Per ottenere il coseno a partire dalla misura dell'ombra, questa va divisa per la lunghezza dell'ipotenusa del triangolo. Noi però non conosciamo questa lunghezza, possiamo calcolarla usando il teorema di Pitagora applicato al triangolo formato dal ritto, l'ombra ed il raggio. Questa ipotenusa si calcola applicando la seguente formula.

$$i = \sqrt{(\text{ombra})^2 + (\text{ritto})^2}$$

Ottenuta l'ipotenusa si può calcolare il coseno facendo la divisione della lunghezza dell'ombra diviso quella dell'ipotenusa.

Nella tabella riportata a lato da sinistra a destra sono si trovano i calcoli eseguiti: la prima colonna riporta le ore in cui sono avvenute le rilevazioni, la seconda riporta la lunghezza standardizzata dell'ombra, cioè della

ora	ombra st.	ipotenusa	coseno	arccosen	gradi dec
12.45	98,9071	140,6507	0,703211	0,790893	45,31481
12.50	97,81421	139,8843	0,699251	0,796447	45,63308
12.55					
13.00					
13.05					
13.10					
13.15	92,34973	136,1193	0,678447	0,82515	47,27761
13.20	91,25683	135,3802	0,674078	0,831081	47,61741
13.25					
13.30	90,16393	134,646	0,669637	0,837076	47,96094
13.35	89,61749	134,2807	0,667389	0,840099	48,1341
13.40	89,61749	134,2807	0,667389	0,840099	48,1341
13.45					
13.50	90,71038	135,0125	0,671867	0,83407	47,78871
13.55	91,80328	135,7492	0,676271	0,828107	47,44705
14.00					
14.05	93,98907	137,2368	0,684868	0,816374	46,77479

$$\text{gradi} = \frac{\text{radianti} \times 180}{\pi}$$

lunghezza che avremmo rilevato se il ritto fosse stato alto 100 cm, nella terza è riportata la lunghezza dell'ipotenusa del triangolo e nella quarta è riportato il coseno.

Per procedere è necessaria la disponibilità di una calcolatrice

scientifiche che ci permetta di passare dal valore del coseno a quello dell'angolo relativo.

A volte le calcolatrici forniscono non il valore dell'angolo in gradi ma quello in radianti, in questo caso è necessario un ulteriore passaggio che consiste nel moltiplicare il valore ottenuto per 180 e dividere il risultato per π greco secondo la formula mostrata a fianco.

Nella tabella della pagina precedente l'ultima colonna riporta la dicitura "gradi decimali":

l'ampiezza degli angoli espressa in gradi, rappresentati però in forma decimale.

In sostanza si tratta di numeri decimali che rappresentano numeri normalmente espressi come complessi in base sessagesimale.

Il numero può essere usato così com'è, oppure essere trasformato nella notazione corrente.

Il procedimento per quest'ultimo passo consiste nel prendere la parte decimale del numero, moltiplicarla per 100 e dividerla per 60 per ottenere i primi e ripetere il procedimento per ottenere i secondi.

Facciamo un esempio: partendo dal valore di 46,77479 che è riportato nell'ultima casella sappiamo che i gradi sono 47; per ottenere i primi si prende la parte decimale 0,77479, la si moltiplica per 100 e la si divide per 60 ottenendo 1,29131 e cioè 1 primo ed un cero resto; per i secondi si procede nello stesso modo ottenendo 0,48551 e cioè 0 secondi ed una certa quantità di decimali di secondi. In conclusione si potrà dire che 46,77479 equivale a 46 gradi, 1 primo e 0,48551 secondi.

A questo punto la parte relativa all'elaborazione dei dati raccolti è completata: abbiamo una serie di valori che rappresenta il variare dell'altezza del sole nell'intervallo considerato.

Questi dati possono essere riportati in grafico ottenendo una curva come quella riportata sotto

Purtroppo sull'asse delle ascisse è riportata solo una serie di numeri e non le varie ore in cui sono stati effettuati i rilevamenti, ma si può ben vedere come gli intervalli 11 e 12, quelli cioè delle ore 13 e 35 e delle ore 13 e 40 sono quelli che presentano la massima altezza del sole: un po' più di 48 gradi.

Analisi dei dati e riflessione

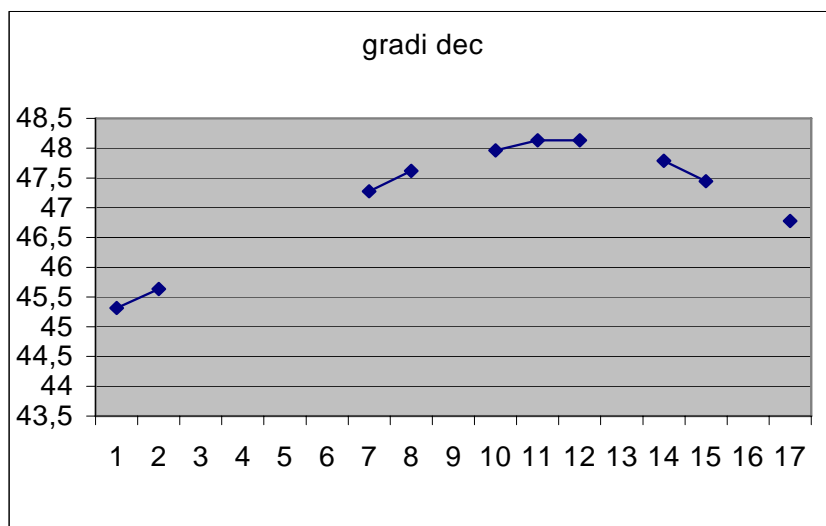
Ottenuti i dati nella forma in cui sono più facilmente leggibili possiamo ora passare ad analizzarli.

La prima cosa da osservare è che il mezzogiorno reale è posizionato tra le 13 e 35 e le 13 e 40, per cui assegneremo il mezzogiorno alle 13 e 37 e cioè 1 ora e 37 minuti dopo le 12.

Ora bisogna spiegare questa discrepanza di 1 ora e 37 primi tra il mezzogiorno rilevato e quello convenzionalmente accettato.

Un'ora di questa differenza è legata al fatto che, quando abbiamo effettuato quei rilevamenti, era in vigore l'ora legale; la differenza tra quella che viene comunemente considerata ora solare e l'ora solare reale si riduce così ad un ritardo di 37 primi; questa differenza è legata al fuso orario.

A questo punto che viene utile la cartina in scala 1/25000: su di essa possiamo leggere le coordinate geografiche esatte: ai quattro angoli della carta sono riportate le coordinate degli stessi, che quindi ci permettono di dare una stima abbastanza precisa delle coordinate del luogo oppure di calcolare con precisione quelle di un certo punto, usando le proporzioni. Possiamo stimare che la nostra scuola abbia le seguenti coordinate: latitudine 45° e $27'$ nord e 9° e $12'$ est rispetto a Greenwich



Visto che il centro del fuso orario è alla longitudine di 15° est abbiamo una differenza di quasi sei gradi (5° e $48'$ per la precisione), allora possiamo dire che il sole giunge su Milano con circa mezzora di ritardo perché deve coprire questi sei gradi in più.

Si può quindi vedere come la differenza tra l'ora solare reale e quella del fuso è proporzionale alla differenza tra la longitudine del luogo e quella media del fuso orario.

I restanti minuti di differenza vanno addebitati alla imprecisione delle misurazioni eseguite, ma questo è un fatto più che prevedibile e che può essere discusso e valutato con i ragazzi.

Passiamo ora a valutare le altezze rilevate: ai due **equinozi** l'altezza del sole a mezzogiorno è equivalente alla latitudine del luogo, per cui la latitudine della nostra scuola dovrebbe essere di $48,1341$ gradi Nord, in effetti la latitudine è un po' inferiore ($45^\circ 25'$) e la differenza è dovuta, oltre che alle imprecisioni di rilevamento, al fatto che le altezze sono state prese il giorno 20 settembre e non il 21 e quindi il sole è rimasto un po' più in alto, variando il dato in questione.

Se le rilevazioni sono invece effettuate intorno al **solstizio** di inverno, il valore che ci si deve attendere è pari alla latitudine del luogo aumentata dell'angolo dell'asse terrestre rispetto all'eclittica..

La situazione è quella rappresentata nello schema a lato. La circonferenza rappresenta la terra, i raggi solari sono le rette rosse 5, l'asse terrestre è la retta verde 2, mentre la retta blu 1 rappresenta la perpendicolare al piano dell'eclittica. La retta nera 4 rappresenta l'orizzonte dell'osservatore posto in B, mentre la retta blu 3 rappresenta la sua verticale.

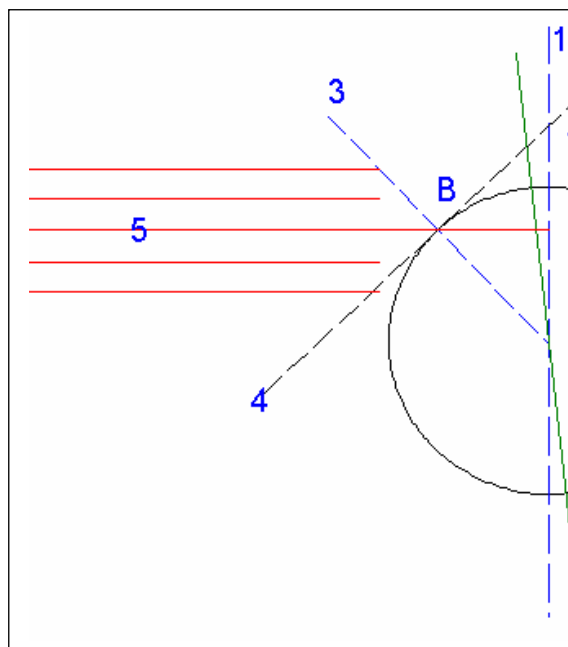
All'equinozio l'asse terrestre è disposto in maniera tale che la sua proiezione coincide con la retta 1.

Come si può vedere la retta che rappresenta l'orizzonte (4), quella che rappresenta la verticale(3) e la perpendicolare all'eclittica (1) si intersecano formando un triangolo rettangolo in B, di cui il raggio 5 costituisce l'altezza relativa all'ipotenusa.

L'angolo formato dalle rette 4 e 5 nel punto B è quello che noi abbiamo rilevato come altezza del sole, esso è uguale ad $\angle HBA$ perché opposto al vertice ed $\angle HBA$, a sua volta, è uguale a $\angle BOH$ perché i due triangoli sono simili per le note proprietà del triangolo rettangolo.

Ora $\angle BOH$ all'equinozio è l'angolo tra la verticale e l'asse terrestre; al solstizio di inverno è formato appunto dalla latitudine di B (angolo tra la retta 3 e la 2) a cui va sommato l'angolo tra la retta 2 e la 1 e cioè l'angolo dovuto all'inclinazione dell'asse terrestre.

Per il **solstizio** d'estate il ragionamento è analogo, solo che l'inclinazione dell'asse terrestre questa volta va sommata e non sottratta.



(*) Per chi desidera una definizione esatta di **coseno**, riporto la definizione fornita a pag. 16 dal Fagioli-Dodero, edito dalla Ghisetti e Corvi nel 1969 (non attualissima ma sempre valida): "Il coseno di un arco (o dell'angolo al centro corrispondente) è l'ascissa dell'estremo dell'arco, rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali avente per origine il centro della circonferenza di raggio unitario, per asse delle ascisse la retta del diametro passante per l'origine degli archi e per asse delle ordinate la retta del diametro passante per l'estremo del primo quadrante"